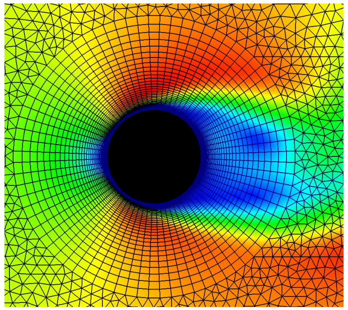
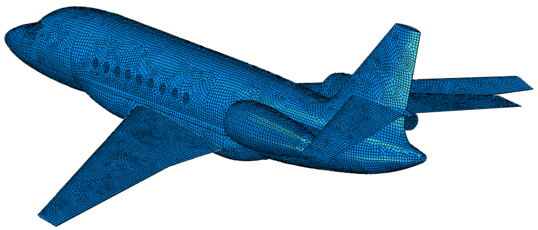
Résolution des systèmes linéaires

I. Mise en place du problème

Une grande part des problèmes scientifiques conduisent à la résolution d'un système linéaire de N équations à N inconnues.
Par exemple :

- Electrocinétique : recherche des tensions, courants au bornes des composants d'un circuit ;
- Statique : recherche des efforts dans toutes les liaisons d'un mécanisme en équilibre ;
- Mécanique des fluides : recherche du champs de vitesse ou de pression d'un fluide en mouvement à l'aide de la méthode des volumes finis (notamment) ;
- Mécanique des milieux continus : recherche des déplacements d'une structure mécanique (bâtiment, véhicule, ...) à l'aide de la méthode des éléments finis ;
- Thermodynamique : recherche du champ de température dans un solide (ou un fluide...).





Soit un système linéaire qui peut se mettre sous la forme

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{0\,0}\,x_0 + a_{0\,1}\,x_1 + \cdots + a_{0\,N-1}\,x_{N-1} & = & b_0 \\ a_{1\,0}\,x_0 + a_{1\,1}\,x_1 + \cdots + a_{1\,N-1}\,x_{N-1} & = & b_1 \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{N-1\,0}\,x_0 + a_{N-1\,1}\,x_1 + \cdots + a_{N-1\,N-1}\,x_{N-1} & = & b_{N-1} \end{array}\right.$$

avec des coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ce système peut aussi être mis sous une forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{0\,0} & a_{0\,1} & \cdots & a_{0\,N-1} \\ a_{1\,0} & a_{1\,1} & \cdots & a_{1\,N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N-1\,0} & a_{N-1\,1} & \cdots & a_{N-1\,N-1} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{N-1} \end{pmatrix}}_{B}$$

Existe-t-il une solution à ce système ? Est-elle unique ? On peut répondre oui à ces deux questions si A **est inversible** :

$$\exists\, C \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K}) \quad \text{tel que} \quad CA = AC = I_N$$

Théorème : Si les coefficients de la matrice A sont tirés au hasard dans $\mathbb{K}$, alors la probabilité est de 1 de trouver une matrice A inversible.

Remarque : Ce résultat semble confortable, les grandeurs physiques variant en général continûement sur l'ensemble des réels (ou complexes)... Toutefois la condition de « tirage au hasard » est fréquemment non vérifiée. En effet, les schémas numériques conduisent en général à des matrices à coefficients entiers ou rationnels, qui peuvent avoir des propriétés particulières. Par ailleurs, des entiers peuvent aussi provenir de la modélisation du problème ou de la théorie elles-même (ex : quantification en physique quantique, valeur critique d'un paramètre...).

Toutefois, dans la suite **on se placera dans l'hypothèse d'une matrice** A **inversible**, c'est-à-dire de déterminant non nul :

$$\boxed{\det(A) \neq 0}$$

II. Résolution d'un système triangulaire

Un cas particulier parmi les systèmes linéaires est la résolution des systèmes triangulaires : la matrice A est soit triangulaire inférieure, soit triangulaire supérieure. La résolution est alors simple car la détermination de chacune des inconnues est découplée.

Exemple : Un exemple simple :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x_0 & + & 2x_1 & + & 4x_2 & = & 0 \\ & & x_1 & + & 2x_2 & = & -1 \\ & & & & 5x_2 & = & -15 \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -15 \end{pmatrix}$$

$x_2 = -3$ $\qquad x_1 = -1 - 2x_2 = 5$ $\qquad x_0 = 2x_1 + 4x_2 = -2$

II.1. Généralisation

Soit le système triangulaire supérieur suivant :

$$\begin{pmatrix} a_{0\,0} & a_{0\,1} & \cdots & a_{0\,N-2} & a_{0\,N-1} \\ 0 & a_{1\,1} & \cdots & a_{1\,N-2} & a_{1\,N-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{N-2\,N-2} & a_{N-2\,N-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{N-1\,N-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-2} \\ x_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{N-2} \\ b_{N-1} \end{pmatrix}$$

Il existe une unique solution ssi $\det(A) \neq 0$, c'est-à-dire si $\boxed{\prod_i a_{ii} \neq 0}$.

La résolution passe par une « remontée » du système d'équations (on parlerait de « descente » pour un système triangulaire inférieur). On obtient trivialement les relations suivantes :

- $x_{N-1} = b_{N-1}/a_{N-1\,N-1}$
- $x_{N-2} = \left(b_{N-2} - a_{N-2\,N-1}x_{N-1}\right)/a_{N-2\,N-2}$
- ...
- $x_1 = \left(b_1 - \sum_{j=2}^{N-1} a_{1\,j}x_j\right)/a_{1\,1}$
- $x_0 = \left(b_0 - \sum_{j=1}^{N-1} a_{0\,j}x_j\right)/a_{0\,0}$

II.2. Algorithme

En généralisant, les formules précédentes, on obtient que l'algorithme de résolution pour un système triangulaire supérieur est le suivant.

Pour chaque ligne i, on résout : $\boxed{x_i = \frac{1}{a_{i\,i}}\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{N-1} a_{ij}x_j\right)}$.

Pour un système triangulaire inférieur, l'algorithme est pratiquement identique, il faut simplement adapter les bornes de la somme.

II.3. Complexité

Comptons les opérations :

— il y a N divisions (une par calcul du terme i)

— il y a autant de soustractions/additions que de multiplications :

  — 0 à la première itération

  — 1 à la seconde

  — $N-1$ à la dernière

  Il y a donc $\frac{N(N-1)}{2}$ soustractions et autant de multiplication.

Conclusion : La complexité de l'algorithme de descente et/ou remontée d'un système triangulaire est en $O(N^2)$.

III. Résolution d'un système linéaire

Pour résoudre un système linéaire, certaines opérations sont possibles qui ne modifient bien sûr pas les solutions :

— changer l'ordre des équations (échanger des lignes) ;

— changer l'ordre des inconnues (échanger des colonnes) ;

— multiplier une équation par un scalaire non nul (multiplier une ligne par un scalaire non nul) ;

— modifier une équation par une combinaison linéaire de celle-ci avec d'autres équations ;

III.1. Méthode de Gauss

L'objectif de la méthode de Gauss est de réaliser des combinaisons linéaires sur les équations pour **transformer le système en système triangulaire supérieur**. La solution sera ensuite déterminée par une « remontée » (voir section précédente).

L'idée est de **travailler colonne par colonne** en travaillant à partir d'un pivot (terme de la diagonale) pour mettre des 0 sur tous les termes en dessous du pivot.

Exemple : système linéaire 4×4

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_1 \leftarrow L_1 - \frac{7}{10} L_0 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{8}{10} L_0 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{7}{10} L_0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 3{,}6 & 3{,}4 \\ 0 & 0{,}1 & 3{,}4 & 5{,}1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 0{,}6 \\ 7{,}4 \\ 8{,}6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 0{,}6 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2} L_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 0{,}6 \\ 5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

III.2. Algorithme

À partir de cet exemple, on en déduit l'algorithme du pivot de Gauss, en pseudo-code :

Pour chaque colonne i de 0 à $N-2$,
  Pour chaque ligne j de $i+1$ à $N-1$,
    Combinaison linéaire : $L_j \leftarrow L_j - a_{ji}/a_{ii} L_i$, c'est-à-dire :
     $tmp = a_{ji}/a_{ii}$
     $b_j = b_j - tmp * b_i$
    Pour chaque terme k de i à $N-1$,
      $a_{jk} = a_{jk} - tmp * a_{ik}$

Remarque : il faut en même temps que l'on réalise les opérations sur la matrice, réaliser les opérations sur le second membre.
La division par a_{ii} impose qu'il ne doit pas y avoir de pivot nul pour réaliser l'algorithme. On verra plus loin comment traiter ces cas.

III.3. Complexité

Comptons les opérations (on suppose que a_{ji}/a_{ii} est calculé une fois pour toute avant la boucle en k) :

- dans la boucle en k, il y a une soustraction et une multiplication.
- dans la boucle en j, il y a
  - 1 division, 1 multiplication et 1 soustraction ;
  - la boucle en k.
- la boucle en k est réalisée $N-i$ fois.
- la boucle en j est réalisée $N-i-1$ fois.
- la boucle en i est réalisée $N-1$ fois.

On en déduit le nombre exact d'opérations :

$$\sum_{i=0}^{N-2} \left(2(N-i)+3\right)(N-i-1)\,.$$

En effectuant un changement de variable $k = N-i-1$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N-1} 2(k+1)k + 3k &= \sum_{k=1}^{N-1} 2k^2 + 5k \\ &= 2 \times \tfrac{(N-1)N(2N-1)}{6} + 5 \times \tfrac{N(N-1)}{2} \\ &= \tfrac{2}{3} N^3 + \tfrac{3}{2} N^2 - \tfrac{13}{6} N \simeq \tfrac{2}{3} N^3\,. \end{aligned}$$

Conclusion : La complexité de la triangularisation est en $O(N^3)$.

III.4. Résolution complète

La résolution complète passe donc par l'application de l'algorithme du pivot de Gauss pour obtenir un système triangulaire supérieur (de complexité $O(N^3)$) puis l'algorithme de remontée (de complexité $O(N^2)$).

CONCLUSION : Globalement la complexité de la résolution par la méthode du pivot de Gauss est de $O(N^3)$.

III.5. Cas des pivots nuls

L'algorithme du pivot de Gauss passe par la division par le pivot. Si le pivot est proche de 0 ou nul alors le calcul numérique deviendra faux.
Dans ce cas, il faut réaliser une permutation sur les lignes en dessous (*pivot partiel*) et/ou une permutation sur les colonnes de droite (*pivot total*).

En pratique, pour éviter de diviser par un nombre petit, on va choisir **le pivot le plus grand possible**, soit dans les éléments de la colonne du pivot situé en dessous de celui-ci (méthode du pivot partiel), soit dans la sous matrice en dessous du pivot (pivot total).

REMARQUE : la stratégie du pivot total est beaucoup plus lente mais plus précise. Son principal inconvénient est que l'ordre des inconnues est modifié lors des permutations des colonnes. Il faut donc penser à les remettre dans l'ordre à la fin du calcul.

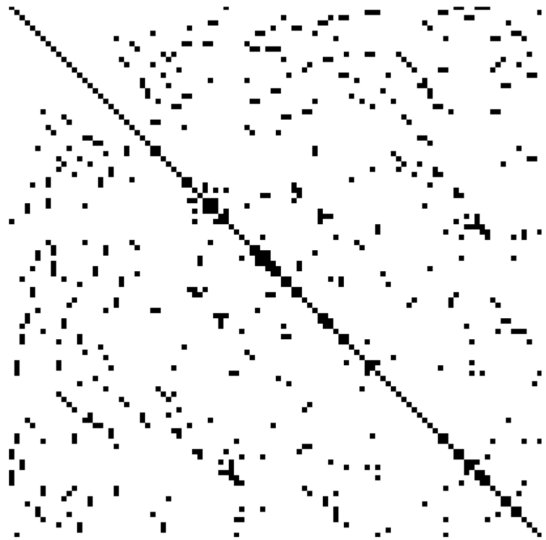
III.6. Stockage des matrices

Dans les exemples précédents, les matrices sont toujours stockées de manières *pleines*, c'est-à-dire que toutes les valeurs sont stoquées avec le même type, a priori `float`, même si elles sont nulles. Il faut être capable de **déterminer la capacité mémoire nécessaire pour stocker la matrice**.

Exemple : Stockage d'une image. Une image est composée de pixel (petit carré élémentaire de l'image). Chaque pixel est généralement décomposé sur les couleurs rouge, vert, bleu (RGB). Le taux de chaque couleur est échantillonné généralement sur 8 bits (256 valeurs).

Prenons une image réalisée avec un appareil photo 16 Mpixels. Il faudra stocker : $3 \times 16 \times 10^6 \times 1\,\text{octet} \approx 48\,\text{Mo}$.

Exemple : Matrice issue d'une modélisation par éléments finis.



Les matrices issus de ces schémas numériques sont des *matrices creuses*, c'est-à-dire contenant énormément de termes parfaitement nuls par construction.
Il existe pour ces matrices des stockages adaptés nommés « sparse » qui permettent de ne stocker que les termes non nuls.
Il faut ensuite définir tous les algorithmes pour réaliser les opérations élémentaires : additions, multiplications, ...

IV. Pour aller plus loin : la décomposition LU

IV.1. Principe

On se place dans le cadre de résolutions multiples d'un même système où seul le second membre change :

$$A\,X = b_p \quad \text{pour} \quad p = 1, M$$

Deux solutions sont possibles :

— Si tous les seconds membres b_p sont connus à l'avance, on applique l'algorithme en traitant tout les seconds membres en même temps. On n'inverse donc qu'une seule fois la matrice A.

— Sinon, on trouve un moyen de **stocker les opérations conduisant à l'inversion** de la matrice A. C'est le principe de la décomposition LU.

Théorème : (complément) Si les coefficients de la matrice A sont tirés au hasard dans $\mathbb{K}$, alors la probabilité est de 1 de trouver une matrice A :

- qui soit inversible ;
- pour laquelle on n'ait jamais à permuter les lignes ou les colonnes lors de la triangularisation par le pivot de Gauss (le pivot trouvé sera toujours non nul) ;

Propriété - Définition : **Décomposition LU**

Si les conditions ci-dessus sont réunies, alors la matrice A admet une décomposition LU : il existe deux matrices L et U **inversibles**, telles que L est **triangulaire inférieure** (*Lower*), U est **triangulaire supérieure** (*Upper*), et

$$A = LU$$

Conséquence : Si cette décomposition LU est connue, alors la résolution du système linéaire $AX = B$ se réduit à la résolution de deux systèmes triangulaires, donc elle est de complexité $O(N^2)$.

Remarque : Si par malheur on tombe sur des zéros sur la diagonale (méthode du pivot partiel ou global), alors on peut toutefois (si A est tout de même inversible) obtenir la décomposition plus générale (*décomposition de Bruhat*)

$$A = L\,T_\sigma\,U \quad \text{ou} \quad A = L\,U\,T_{\sigma'}$$

où T_σ et $T_{\sigma'}$ sont des matrices de permutation. On garde la même complexité.

IV.2. Construction

Les matrices L et U sont obtenues progressivement par l'algorithme du pivot de Gauss, dont chaque étape peut se ramener à une multiplication à gauche par une matrice.

➔ Soit $A^{(0)} = A$ la matrice initiale. La première étape du pivot de Gauss peut être mise sous la forme

$$A^{(1)} = P^{(0)}\,A^{(0)} \quad \text{avec} \quad P^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a^{(0)}_{1\,0}}{a^{(0)}_{0\,0}} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a^{(0)}_{2\,0}}{a^{(0)}_{0\,0}} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a^{(0)}_{N-1\,0}}{a^{(0)}_{0\,0}} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

On retrouve pour chaque ligne i la relation $L_i \leftarrow L_i - \dfrac{a^{(0)}_{i\,0}}{a^{(0)}_{0\,0}}\,L_0$.

➔ La k-ième étape du pivot de Gauss peut être mise sous la forme

$$A^{(k)} = P^{(k-1)}\,A^{(k-1)} \quad \text{avec} \quad P^{(k-1)} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -\frac{a^{(k-1)}_{k+1\,k}}{a^{(k-1)}_{k\,k}} & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -\frac{a^{(k-1)}_{k+2\,k}}{a^{(k-1)}_{k\,k}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\frac{a^{(k-1)}_{N-1\,k}}{a^{(k-1)}_{k\,k}} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

On retrouve pour chaque ligne i la relation $L_i \leftarrow L_i - \dfrac{a^{(k-1)}_{i\,k}}{a^{(k-1)}_{k\,k}}\,L_0$.

➔ Par récurrence simple, on obtient finalement la matrice triangulaire supérieure

$$A^{(N-1)} = P^{(N-2)}\,P^{(N-3)}\dots P^{(0)}\,A^{(0)} = U\,.$$

➔ Les matrices $P^{(k)}$ sont des matrices triangulaires inférieures. Or on peut montrer que le produit de 2 matrices triangulaires inférieures reste triangulaire inférieure. De même l'inverse d'une matrice triangulaire inférieure est triangulaire inférieure.
En notant $L^{(k)}$ l'inverse de la matrice $P^{(k)}$, on obtient alors

$$A = A^{(0)} = (P^{(N-2)}P^{(N-3)}...P^{(0)})^{-1}\,U = \underbrace{(L^{(0)}L^{(1)}...L^{(N-2)})}_{L}\,U = LU$$

➔ Les matrices $L^{(k)}$ s'obtiennent très simplement à partir des $P^{(k)}$ en mettant inversant les signes des termes extra-diagonaux :

$$L^{(k-1)} = \left(P^{(k-1)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & +\frac{a^{(k-1)}_{k+1\,k}}{a^{(k-1)}_{k\,k}} & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & +\frac{a^{(k-1)}_{k+2\,k}}{a^{(k-1)}_{k\,k}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & +\frac{a^{(k-1)}_{N-1\,k}}{a^{(k-1)}_{k\,k}} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit l'existence de la décomposition LU, qui peut être stoquée une fois pour toute puisque la matrice A du système ne change pas.

Exemple : Soit le système linéaire 4×4 suivant

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{7}{10}L_0 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{8}{10}L_0 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{7}{10}L_0 \end{array} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{7}{10} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{8}{10} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{7}{10} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L^{(0)}}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 3{,}6 & 3{,}4 \\ 0 & 0{,}1 & 3{,}4 & 5{,}1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 0{,}6 \\ 7{,}4 \\ 8{,}6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L^{(1)}}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 0{,}6 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_2 \end{array} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}}_{L^{(2)}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}}_{U}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 0{,}6 \\ 5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Calcul de L :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{7}{10} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{8}{10} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{7}{10} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L^{(0)}} \quad \begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{L^{(1)}} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{7}{10} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{8}{10} & 4 & 1 & 0 \\ \frac{7}{10} & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}}^{L^{(2)}} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{7}{10} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{8}{10} & 4 & 1 & 0 \\ \frac{7}{10} & 1 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}}_{L} \end{array}$$

Reste à vérifier que le produit $LU = A$...